Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas I (MA-1111).
Septiembre – diciembre 2013.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

Tercer examen parcial (40%)

1. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}, \qquad f'(x) = -\frac{4(x-4)}{(x-2)^3}, \qquad f''(x) = \frac{8x-40}{(x-2)^2}$$

- Determine el dominio de f y los puntos en los que f es derivable.
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
- Encuentre los valores extremos, tanto locales (relativos) como globales (absolutos), de f.
- Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f.
- Halle las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de la gráfica de f.
- Haga un bosquejo de la gráfica de f y determine su rango (imagen).

<u>Solución</u>:

Tenemos que:

$$\mathbf{Dom}f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{2\}$$

La función puede ser escrita como:

$$f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2} = (4x-12)\left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = g(x)h(x)$$

Donde, la función g es continua y derivable en todo su dominio (polinomio); mientras que, la función h es continua y derivable en todos los números reales menos en el dos. Por ende, la función será derivable en todos los números reales menos en el dos.

Busquemos ahora los factores (raíces) de la primera derivada:

$$x = 4, \qquad x = 2$$

Teniendo:

	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, +\infty)$
$4-x$	$+$	$+$	$-$
$(x-2)^3$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$
	↘	↗	↘

Así, la función será decreciente en el intervalo $\{(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)\}$ *y creciente en el intervalo* $(2,4)$.

Del análisis anterior podemos considerar posibles candidatos para extremos. Tenemos que $x = 2$ *es un candidato para mínimo global y* $x = 4$ *es un candidato para máximo global.*

Evaluamos en la segunda derivada y obtenemos:

$$f''(2)=\frac{8(2)-40}{(2-2)^4}\longrightarrow +\infty$$

Concluyendo que la función no tiene mínimo global.

$$f''(4)=\frac{8(4)-40}{(4-2)^4}=\frac{32-40}{16}=-\frac{1}{2}<0$$

Concluyendo que el punto $\mathrm{P}(4,1)$ *es un máximo global.*

Buscamos ahora los factores (raíces) de la segunda derivada:

$$x=5,\qquad x=2$$

Teniendo:

	$(-\infty,2)$	$(2,5)$	$(5,+\infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$(x-2)^4$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$-$	$+$

Así, la función será cóncava en el intervalo $(5,+\infty)$ *y convexa en el intervalo* $\{(-\infty,2)\cup(2,5)\}$.

Teniendo que en $x=5$ *hay un cambio de concavidad. El punto* $\mathrm{P}\left(5,\frac{8}{9}\right)$ *es un punto de inflexión.*

Vemos que $x=2$ *es una asíntota vertical:*

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{4x-12}{(x-2)^2}=+\infty=\lim_{x\to 2^-}\frac{4x-12}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

Tenemos una asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Así, la recta $y=0$ *es una asíntota horizontal.*

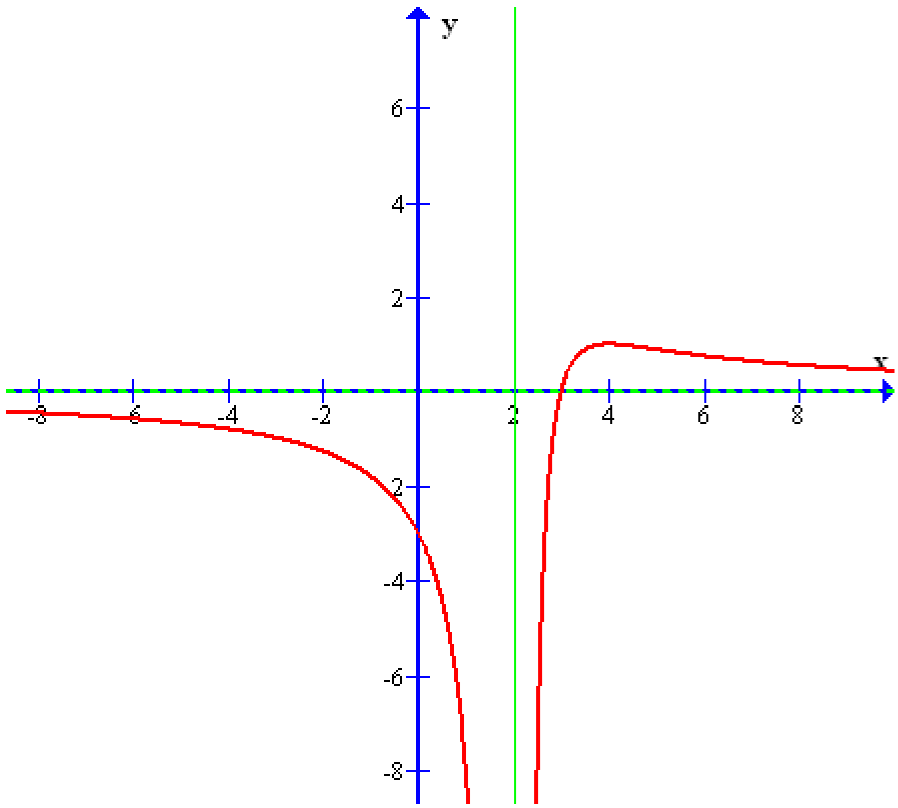
No hay asíntotas oblicuas porque hay asíntotas horizontales. Verificamos:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-12}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4-\frac{12}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=0$$

Teniendo que la recta $y = mx + b = 0$ es una asíntota horizontal.

Graficamos la función f:



2. Sea $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{7 + 4sen^2(x)}$. Halle $(f^{-1})'(3)$ sabiendo que el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$ pertenece al gráfico de f.

<u>**Solución**</u>**:**

Sabemos que:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Longrightarrow \left(f^{-1}(f(x))\right)' \cdot f'(x) = 1 \Longrightarrow \left(f^{-1}(f(x))\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

Ahora bien, tenemos que:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{7 + 4sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{7 + 4\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{9} = 3$$

Dicho esto, podemos evaluar $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\left(f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)' = (f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Tenemos:

$$f'(x) = \frac{8sen(x)\cos(x)}{2\sqrt{7+4sen^2(x)}} = \frac{4sen(x)\cos(x)}{\sqrt{7+4sen^2(x)}} \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{3}{2}$$

3. Halle la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 17$ en los puntos que tienen abscisa $x = 2$.

<u>Solución</u>:

Cualquier punto que esté sobre la abscisa $x = 2$ *tendrá la forma* $(2, y_0)$. *Las rectas tangentes vendrán dadas por:*

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Como la recta debe pasar por el punto que toca la circunferencia:

$$(2-1)^2 + (y_0+1)^2 = 17 \Longrightarrow 1 + y_0^2 + 2y_0 + 1 = 17 \Longrightarrow y_0^2 + 2y_0 - 15 = 0$$

$$\Longrightarrow (y_0+5)(y_0-3) = 0$$

Obteniendo:

$$y_0 = 3, \qquad y_0 = -5$$

Sabemos que la pendiente de la recta tangente tendrá la forma $m = f'(x)$. *Derivamos implícitamente:*

$$2(x-1) + 2(y+1)y' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{1-x}{y+1}$$

Si $y_0 = 3$*:*

$$m = y' = \frac{1-2}{3+1} = -\frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x-2)$$

Si $y_0 = -5$*:*

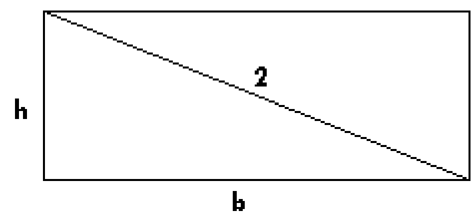
$$m = y' = \frac{1-2}{-5+1} = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la recta tangente será:

$$y+5=\frac{1}{4}(x-2)$$

4. Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que tiene diagonal de longitud 2.

<u>Solución</u>:



El área del rectángulo vendrá dada por:

$$\mathrm{A}=bh, \qquad b>0, \qquad h>0$$

Aplicando Pitágoras tenemos que:

$$4=b^2+h^2 \Longrightarrow b=\sqrt{4-h^2},$$

Sustituyendo en la expresión del área:

$$\mathrm{A}=h\sqrt{4-h^2}$$

Recordemos que maximizar el cuadrado de una función es equivalente a maximizar la función misma:

$$\mathrm{A}=h^2(4-h^2)=4h^2-h^4$$

Derivamos:

$$\mathrm{A}'(h)=8h-4h^3=0 \Longrightarrow 4h(2-h^2)=0$$

Obteniendo así tres posibles valores para h:

$$h=0, \qquad h=\sqrt{2}, \qquad h=-\sqrt{2}$$

Desechamos el primero y el tercero, pues no tienen sentido físico.

Hallamos la segunda derivada:

$$\mathrm{A}''(h)=8-12h^2 \Longrightarrow \mathrm{A}''\left(\sqrt{2}\right)=8-12(2)=-16<0$$

Garantizando que el valor obtenido hace que el área sea máxima.

Así, la otra dimensión será:

$$4=2+b^2 \Longrightarrow b=\sqrt{2}$$

Para que el área sea máxima las dimensiones deben ser:

$$b = h = \sqrt{2}$$

5. Sea f la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^{7/3}, & si\ x < 0 \\ 1 - \cos(x), & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Calcule $f'(0)$.
- Calcule la (función) derivada de f.
- Calcule $f''(0)$.

<u>**Solución**</u>:

Notamos que la función es continua en todo su dominio:

$$f(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} (1 - \cos(x)) = \lim_{x \to 0^-} x^{7/3}$$

Ahora bien, tenemos que:

$$f'(0) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^{7/3}}{x} = 0 \end{cases}$$

Como los límites laterales son iguales se tiene que:

$$f'(0) = 0$$

Derivamos la función:

Por la derecha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 - \cos(x+h) - 1 + \cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cos(x) - \cos(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{sen(x+h)}{1} = sen(x)$$

Por la izquierda:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(x+h)^{7/3} - x^{7/3}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{7}{3}(x+h)^{4/3} = \frac{7}{3} x^{4/3}$$

Así:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{3} x^{4/3}, & si\ x < 0 \\ sen(x), & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Busquemos ahora la segunda derivada:

$$f''(0)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{sen(x)}{x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{7}{3}x^{4/3}}{x} = 0 \end{cases}$$

Los límites laterales son distintos y, por ende, la segunda derivada de la función no existe.

Se agradece la notificación de errores

Christian Laya